Théorème de Plancherel.

Leçon : 234, 250, 201, 208, 235

Ref : Rudin, note de Hugo (⚠ convention de la TF).

Convention : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$.

Théorème 1

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, on a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Théorème 2

La transformée de Fourier, définie sur $L^1 \cap L^2$, se prolonge en un isomorphisme, proportionnellement une isométrie, de L^2 sur L^2.

Preuve thm 1

1) On pose $\tilde{f} = \overline{f(-\cdot)}$, et $g = f * \tilde{f}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $g(x) = f * \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\overline{f(-y)}\,dy$.

et $g(0) = \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

On a, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $(\tilde{f})^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(-x)} e^{-ix\cdot\xi} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)} e^{ix\cdot\xi} dx = \overline{\hat{f}(\xi)}$$

et $\hat{g} = (f * \tilde{f})^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{\tilde{f}} = \hat{f}\,\bar{\hat{f}} = |\hat{f}|^2$.

De plus, par régularisation de la convolution, comme $f, \tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, alors $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ et $\|g\|_\infty \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ (et $g \in L^1$).

Conv. L^1-L^1

~~2) On introduit une partition de l'unité.~~

~~On pose~~ $H_m(t) = e^{-|t|/m}$, ~~$t \in \mathbb{R}$, et on définit~~

~~Pour $\lambda > 0$,~~ $R_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^N} H(\lambda \xi) e^{ix\xi} d\xi$

$R_m(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \widehat{H_m}(x)$.

~~Idée: avoir une fonct° positive dont la TF est ≥ 0 est facilement calculable~~

$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\xi|/m} e^{-ix\cdot\xi} d\xi$

Idée: $\begin{cases} g(0) = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \hat{g} = |\hat{f}|^2 \end{cases} \rightarrow g(0) \simeq \int \hat{g}$

~~On~~

2) On pose $\varphi : x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^N} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$.

On pose pour $\varepsilon > 0$, $\varphi(\varepsilon x) =: \varphi_\varepsilon(x)$

et donc $\widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^N} \hat{\varphi}(\xi/\varepsilon)$.

On va mq que : a) $\widehat{\varphi_\varepsilon} * g(0) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} g(0) = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

b) $\widehat{\varphi_\varepsilon} * g(0) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g} = \frac{1}{(2\pi)^N} \|\hat{f}\|^2$

a) Mq $\widehat{\varphi_\varepsilon} * g(0) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} g(0) = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

$|\widehat{\varphi_\varepsilon} * g(0) - g(0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} g(-y) \widehat{\varphi_\varepsilon}(y) dy - g(0) \right|$

On $\int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}_\varepsilon(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (2\pi)^{N/2} e^{-\|\xi\|^2/2}\,d\xi$

$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} (2\pi)^{N/2} = 1.$

Donc $|\hat{\varphi}_\varepsilon * g(0) - g(0)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(-y) - g(0)|\,|\hat{\varphi}_\varepsilon(y)|\,dy$

$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(-y) - g(0)|\,|\hat{\varphi}(y/\varepsilon)|\,dy/\varepsilon^N$

$x = y/\varepsilon$

$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(-x\varepsilon) - g(0)|\,|\hat{\varphi}(x)|\,dx$

$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ car CVD : $|g(-x\varepsilon) - g(0)|\,|\hat{\varphi}(x)|$

$\leq 2\|g\|_\infty |\hat{\varphi}(x)| \in L^1_x(\mathbb{R}^N)$

$\hookrightarrow g\ \mathcal{C}^0$.

Donc $\hat{\varphi}_\varepsilon * g(0) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = g(0)$.

b) Mq $\varphi_\varepsilon * g(0) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}$.

On $\varphi_\varepsilon * g(0) = \int_{\mathbb{R}^N} g(-y)\,\hat{\varphi}_\varepsilon(y)\,dy$

$= \int_{\mathbb{R}^N} g(-y) \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x) e^{-ix\cdot y}\,dx\,dy$, φ_ε est pair

$= \int_{\mathbb{R}^N} g(-y) \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x) e^{ix\cdot y}\,dx\,dy$, Fubini, $g \in L^1_y$

$= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x) \int_{\mathbb{R}^N} g(-y) e^{ix\cdot y}\,dy\,dx$ $\varphi_\varepsilon \in L^1_x$.

$= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x)\,|\hat{g}|^2(x)\,dx$

On ne peut pas appliquer le TCVD car $\hat{g} \notin L^2(\mathbb{R}^N)$ a priori.

Or $\varphi \searrow$ sur $\mathbb{R}_+$, la suite $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est croissante pour $\varepsilon > 0$.

Par Beppo-Levi comme $(\varphi_\varepsilon |\hat{g}|^2)_{\varepsilon \searrow 0}$ est croissante positive,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \hat{\varphi}_\varepsilon * g(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varphi_\varepsilon(x) |\hat{g}(x)|^2 \, dx \quad \text{↲ } \varphi_\varepsilon \text{ continue en } 0$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{g}(x)|^2 \, dx \times \varphi(0)$$

Par unicité de la limite, $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|\hat{g}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\varphi(0)} \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

$\square$

→ mettre les calculs en ex dans le plan.

Preuve (thm 2)

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2 \text{ est linéaire continue} \\ \cdot\ L^1 \cap L^2 \text{ dense dans } L^2 \\ \cdot\ L^2 \text{ est complet} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ se prolonge de manière} \\ \text{unique en une application} \\ \text{linéaire continue } \tilde{\mathcal{F}} : L^2 \to L^2 \end{array}$$

On renote $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$, et $\hat{f} = \tilde{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(f)$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

On pose $Y = \{ \hat{f} ; f \in L^2(\mathbb{R}^N) \}$. On veut mq $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$. On a déjà $Y \subset L^2(\mathbb{R}^N)$, par ce qui précède.

On va mq $Y \overset{①}{=} \bar{Y} \overset{②}{=} L^2(\mathbb{R}^N)$

① $Y = \bar{Y}$, ie Y est fermé. Soit $(g_n)_n \in Y^{\mathbb{N}}$ tq $g_n \xrightarrow{L^2} g \in L^2$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n \in L^2$ tq $\hat{f}_n = g_n$.

Or $(g_n)_n$ cv $\Rightarrow$ CY dans L^2, donc (f_n) est également de

Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ car $\|\hat{f}_m\|_2 = (2\pi)^{N/2} \| f_m\|_2$

Donc il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tq $f_m \xrightarrow{L^2} f$.

Par continuité de $\mathcal{F}$, $\hat{f}_m \xrightarrow{L^2} \hat{f}$.

Par unicité de la limite, $\hat{f} = g \in Y$. Donc Y est fermé.

(ii) Y est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. On va mq $Y^\perp = \{0\}$. Soit $\omega \in Y^\perp$.

On a $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$
$$\hat{\varphi}_\varepsilon * \bar{\omega}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\hat{\varphi}_\varepsilon(x-t)}_{\in Y} \bar{\omega}(t)\, dt$$

$$= \langle \varphi_\varepsilon(x - \cdot), \omega \rangle = 0.$$

De plus, $\| \hat{\varphi}_\varepsilon * \bar{\omega} - \bar{\omega}\|_{L^2} \to 0$. En effet:

$|\hat{\varphi}_\varepsilon * \bar{\omega} - \bar{\omega}| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{\omega}(\cdot - y) - \bar{\omega}(\cdot)|\, \hat{\varphi}_\varepsilon(y)\, dy$, donc

$$\|\hat{\varphi}_\varepsilon * \bar{\omega} - \bar{\omega}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\tau_y \bar{\omega} - \bar{\omega}\|^2_{L^2} \frac{1}{\varepsilon^N} \hat{\varphi}(y/\varepsilon)\, dy$$

⚠ le faire ssi y'a le temps

Fubini ③ sensons

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \|\tau_{\varepsilon x} \bar{\omega} - \bar{\omega}\|^2_{L^2} \frac{1}{\varepsilon^N} \hat{\varphi}(x) \varepsilon^N\, dx \quad y = \varepsilon x$$

$\underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ par CVD et continuité de $x \mapsto \tau_x \bar{\omega}$.

Donc $\bar{\omega} = 0 \Rightarrow Y^\perp = \{0\}$.

Donc $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}$ est surjective.

□

Résumé.

· Thm 1 : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, $\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, et $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

On choisit g tq : $\begin{cases} \hat{g} = |\hat{f}|^2 \\ g(0) = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{cases}$

info précise sur g $\leftrightarrow$ info large sur $\hat{g}$

$$g(0) \leftrightarrow \int \hat{g}$$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leftrightarrow \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

→ on convole avec un noyau bien choisi, et on force $\hat{f}$ à apparaître

· Thm 2 : prolongement a.u.c ⊕ surjectivité via densité
→ p.s dans Hilbert